EXERCICE№22

0<b<a

1) $\left.\begin{array}{l} a)\ (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab) \\ (\sqrt{ab})^2 = a.b \end{array}\right\rangle \Rightarrow (\frac{a+b}{2})^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab)$

$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$

d'où $(\frac{a+b}{2})^2 \geq (\sqrt{ab})^2$ et par suite $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

b) $(a-b)^2 - (a^2-b^2) = a^2+b^2-2ab-a^2+b^2 = 2b^2-2ab$

$= 2b.(b-a) \leq 0$ (car 0<b<a)

d'où $(a-b)^2 \leq a^2-b^2$

2) $\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$

a) * pour n=0 $b_0 = b \leq a_0 = a$

* supposons que : $b_n \leq a_n$ et montrons que : $b_{n+1} \leq a_{n+1}$

$b_{n+1} \leq a_{n+1}$ d'après 1) a) conclusion : $b_n \leq a_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

b)* $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} \leq 0$ d'où (a_n) est décroissante

* $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}\left[\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right] \geq 0$ car $\sqrt{a_n} \geq \sqrt{b_n}$

d'où (b_n) est croissante

3) a) d'après 1) b) : $(a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 \Rightarrow (a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq \frac{(a_n+b_n)^2}{4} - a_n b_n$

$$\Rightarrow (a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq \frac{a_n^2+b_n^2+2a_nb_n}{4} - a_nb_n$$

$$\Rightarrow (a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq \frac{a_n^2+b_n^2-2a_nb_n}{4}$$

$$\Rightarrow (a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq (\frac{a_n-b_n}{2})^2$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn